

I. Wektory

I.1. Wierzchołki trójkąta ABC są dane jako $A[1, -2, 1]$, $B[1, 0, 0]$, $C[-3, 1, 3]$. Należy obliczyć długości boków i kąty trójkąta. Wyznaczyć wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni trójkąta. Obliczyć pole trójkąta.

I.2. Rozłożyć wektor $\vec{a} = [1, 2, 3]$ na składową równoległą i prostopadłą do wektora $\vec{b} = [1, -1, 1]$.

I.3. Znaleźć rzut prostopadły wektora $\vec{a} = [1, 0, -1]$ na płaszczyznę $2x + 3y - z - 7 = 0$.

I.4. Wykazać, że dla dowolnych wektorów $-\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \leq \vec{a} \circ \vec{b} \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$.

I.5. Dla każdych trzech liniowo niezależnych wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ istnieje wektor, który tworzy ten sam kąt z każdym z nich. Należy znaleźć taki wektor jednostkowy \vec{u} i ów kąt φ dla trzech wektorów: $\vec{a} = [0, 1, 1]$, $\vec{b} = [1, 0, 1]$, $\vec{c} = [1, 1, 0]$.

I.6. Sprawdzić następujące tożsamości dla dowolnych wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:
 $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{a} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$, $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \circ \vec{b})\vec{c}$.

I.7. Dwa boki trójkąta tworzą wektory \vec{a} i \vec{b} , między którymi jest kąt ϕ . Należy obliczyć długość trzeciego boku \vec{c} . Ponadto wykazać, że twierdzenie Pitagorasa $\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{c}\|^2$ jest spełnione tylko w trójkącie prostokątnym t.j. $\phi = \frac{\pi}{2}$ radianów.

I.8. Obliczyć pole równoległoboku, którego boki tworzą wektory $\vec{a} = [1, 2, -1]$ i $\vec{b} = [1, 1, 3]$.

I.9. Obliczyć objętość równoległościanu, którego krawędzie tworzą wektory $\vec{a} = [1, 2, 0]$, $\vec{b} = [2, 1, 0]$, $\vec{c} = [1, 1, 1]$.

I.10. Współrzędne końców odcinka AD są $A[1, 1, -3]$ i $D[0, 1, 2]$. Należy znaleźć współrzędne punktów B i C należących do tego odcinka i dzielących ten odcinek na trzy równe części tzn. $|\vec{AD}| = |\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{CD}|$

I.11. Wierzchołki trójkąta ABC są następujące: $A[1, 1, -1]$, $B[-1, 0, 2]$, $C[0, -1, 2]$. Prócz tego dany jest punkt $D[0, 0, 1]$. Należy sprawdzić czy: a) punkt D leży w płaszczyźnie trójkąta czy poza nią b) jeśli D leży w płaszczyźnie to należy ustalić czy znajduje się we wnętrzu trójkąta, na jego brzegu czy też na zewnątrz trójkąta ABC .